Energiestufenmodell von Wasserstoff

1. a) Berechnen Sie den Bohrschen Radius r_1 eines Elektrons auf der innersten Bahn der Atomhülle eines Wasserstoffatoms.
   b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Elektrons auf der Bahn mit n=1?
   c) Bestimmen Sie notwendige Kraft, um das Elektron auf der Kreisbahn n=1 zu halten.
   d) Geben Sie die Radien und Geschwindigkeiten der Bahnen für die Quantenzahlen 2, 3, 4, … an.

2. a) Berechnen Sie die Energie des Elektrons im Grundzustand (n=1) in der Hülle des Wasserstoffatoms. Geben Sie die Lösungen in J und eV an.
   b) Wie groß sind die Energiewerte (in eV) für die Quantenzahlen 2, 3,und 4? Beschreiben Sie die Energieverteilung mit zunehmender Quantenzahl.
   c) Welcher Energiewert ergibt sich für $n \to \infty$?

3. a) Berechnen Sie aus den Energiebeträgen der Aufgabe 2 die abgegebenen Energiebeträge bzw. emittierten Frequenzen und Wellenlängen bei den Quantensprüngen:
   a_1) $2 \to 1$ a_2) $3 \to 2$ a_3) $3 \to 1$
   b) Welche höchste Frequenz bzw. kleinste Wellenlänge kann ein gebundenes Elektron in einem Wasserstoffatom emittieren?
   c) Beim Quantensprung von $6 \to 1$ wird Licht der Frequenz $3{,}2 \cdot 10^{15}$Hz ausgesendet. Berechnen Sie <u>daraus</u> die Energie der Niveaus n=6.

4. Die Quantensprünge $4 \to 3$ und $5 \to 3$ in einem Wasserstoffatom erzeugen Strahlungen mit den Wellenlängen 1878nm bzw. 1284nm.
   a) Ordnen Sie den Quantensprüngen die Wellenlängen zu. Begründen Sie.
   b) Leiten Sie <u>aus diesen Angaben</u> der Wellenlängen eine Gleichung zur Berechnung der emittierten Wellenlänge beim Quantensprung von $5 \to 4$ her.

<u>Lösungen</u>:

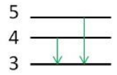
1. a) $r_n = n^2 \cdot \frac{h^2 \cdot \varepsilon_0}{\pi \cdot m \cdot e^2}$ n=1 $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$m ($d_1 \approx 1 \cdot 10^{-10}$m)
   b) $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m \cdot r}}$ oder $v = \frac{n \cdot h}{2\pi \cdot m \cdot r}$ $v_1 = 2{,}18 \cdot 10^6$m/s
   c) Radialkraft: $F_{Rad} = \frac{m \cdot v^2}{r} = 8{,}2 \cdot 10^{-8} N$
   d) $r_n = r_1 \cdot n^2$
   $r_2 = 2{,}12 \cdot 10^{-10} m$ $v_2 = 1{,}09 \cdot 10^6$m/s
   $r_3 = 4{,}77 \cdot 10^{-10} m$ $v_3 = 7{,}28 \cdot 10^5 m/s$
   $r_4 = 8{,}48 \cdot 10^{-10} m$ $v_4 = 5{,}46 \cdot 10^5 m/s$

2. a) $E_n = -\frac{e^4 \cdot m}{8{\varepsilon_0}^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ n=1 $E_1 = -2{,}18 \cdot 10^{-18} J = -13{,}6 eV$
   b) $E_n = -E_1 \cdot \frac{1}{n^2}$
   $E_2 = -5{,}45 \cdot 10^{-19} J = -3{,}4 eV$
   $E_3 = -2{,}42 \cdot 10^{-19} J = -1{,}51 eV$
   $E_4 = -1{,}36 \cdot 10^{-19} J = -0{,}85 eV$
   Die Differenz der Energiebeträge nimmt mit zunehmender Quantenzahl ab.
   c) $E_\infty = 0$

3. a_1) $\Delta E_{2.1} = -10{,}2 eV = -1{,}634 \cdot 10^{-18} J$ $f_{2.1} = -\frac{\Delta E}{h} = -2{,}47 \cdot 10^{15} Hz$ λ = 121,6nm
   a_2) $\Delta E_{3.2} = -1{,}89 eV = -3{,}03 \cdot 10^{-19} J$ $f_{3.2} = -4{,}57 \cdot 10^{14} Hz$ λ = 656,6nm
   a_3) $\Delta E_{3.1} = -12{,}09 eV = -1{,}937 \cdot 10^{-18} J$ $f_{3.1} = -2{,}92 \cdot 10^{15} Hz$ λ = 102,6nm

   b) Quantensprung von $\infty \to 1$: $\Delta E = -13{,}6 eV = 2{,}18 \cdot 10^{-18} J$ $f = 3{,}29 \cdot 10^{14}$Hz λ = 91,2nm
   c) $\Delta E = h \cdot (-f) = -2{,}12 \cdot 10^{-18} J = -13{,}23 eV$ $E_6 = E_1 - \Delta E = -0{,}366 eV$

4. a) $\Delta E_{4.3} < \Delta E_{5.3}$ $\to$ 4$\to$3: kleinere Frequenz - größere Wellenlänge, also 1878nm
   5$\to$3: …, also 1283nm



   b) $E_{5.4} = E_{5.3} - E_{4.3}$ $f_{5.4} = f_{5.3} - f_{4.3}$ $\frac{1}{\lambda_{5.4}} = \frac{1}{\lambda_{5.3}} - \frac{1}{\lambda_{4.3}}$ $\lambda_{5.4} = \frac{\lambda_{4.3} - \lambda_{5.3}}{\lambda_{4.3} \cdot \lambda_{5.3}}$ =4049,5nm