Energiebilanz harmonischer (ungedämpfter) Schwingungen

1. Ein harmonischer Schwinger habe die Masse m=2,0kg und schwingt mit einer Periodendauer von T=0,4s. Zu einem Zeitpunkt t>0 beträgt seine Elongation x(t)=3,5cm und seine Geschwindigkeit v(t)=0,6m/s.
   a) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des schwingenden Systems.
   b) Wie groß ist die Amplitude des Schwingers?
   c) Mit welcher maximalen Geschwindigkeit durchläuft der Schwinger seine Gleichgewichtslage?
   d) Geben Sie die Schwingungsgleichung für die Anfangsbedingung x(0)=0 an.
   e*) Wie groß sind die Anteile Elongations- und Bewegungsenergie zur Zeit t=0,14s?

2. An eine vertikale aufgehängte entspannte Feder mit der Federkonstanten D=10N/m wird ein Massestücke m=50g gehängt und losgelassen. Daraufhin entstehe eine ungedämpfte Schwingung.
   a) Bestimmen Sie die Frequenz und die Amplitude der Schwingung.
   b) Geben Sie die Schwingungsgleichung dieser harmonischen Schwingung an und zeichnen Sie das Schwingungsbild für 2 Perioden.
   c) Wie groß ist die Gesamtenergie dieses Federschwingers?
   d) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit des schwingenden Körpers.

3. Ein Fadenpendel der Länge l=60cm und einem Pendelkörper der Masse m=10g wird zur Zeit t=0 mit v_0=0,3m/s angestoßen und in positive Richtung ausgelenkt. Es entsteht eine freie Schwingung.
   a) Zeigen Sie, dass der maximale Auslenkwinkel bei dieser Schwingung kleiner als 10° ist.
   b) Bestimmen Sie die Richtgröße des Systems Fadenpendel und die Amplitude x_{max} (Kreisbogen) der Schwingung.
   c) Berechnen Sie die Bewegungs- und Auslenkungsenergie zur Zeit t=1s.

4*. Für die Gesamtenergie eines harmonisch schwingenden Systems gilt: $E_{ges} = \frac{1}{2}D \cdot x(t)^2 + \frac{1}{2}m \cdot v(x)^2$
Veranschaulichen Sie grafisch den zeitlicher Verlauf der Auslenkungs- und Elongationsenergie für die Anfangsbedingung $x_0(0)$=0.

<u>Lösungen:</u>

1. a) $D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 493{,}5N/m$ $\quad E_{kin} = \frac{2kg}{2} \cdot (0{,}6\frac{m}{s})^2$ = 0,36J $\quad E_{pot} = \frac{493{,}5N/m}{2} \cdot 0{,}035m^2 = 0{,}3J$
   $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}$ = 0,66J
   b) $x_{max} = \sqrt{\frac{2E_{ges}}{D}} = 5{,}17cm$ $\quad$ c) $v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{ges}}{m}} = 0{,}81m/s$
   d) $y(t) = 5{,}17cm \cdot \sin(5\pi \cdot t/s)$
   e*)

2. a) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}05kg}{\frac{10N}{m}}} = 0{,}444s$ $\quad$ f = 2,25Hz
   Gesamtdehnung h der Feder: $\quad E_{pot} = E_{Feder}$ $\quad mgh = \frac{1}{2}Dh^2$ $\quad h = \frac{2mg}{D} = 9{,}81cm$
   y_{max} = h/2 = 4,9cm
   b) $y(t) = 4{,}9cm \cdot \cos(4{,}5\pi \cdot t/s)$
   c) $E_{ges} = E_{pot}(ges) = \frac{1}{2}D \cdot y_{max}^2 = 0{,}012J$ $\quad$ c) $v = \sqrt{\frac{2E_{ges}}{m}} = 0{,}69m/s$

3. a) Anregungsenergie: $\quad E_{kin} = \frac{0{,}01kg}{2} \cdot (0{,}3m/s)^2 = 4{,}5 \cdot 10^{-4}J$
   Anheben des Schwingers: $\quad h_{max} = \frac{E}{m \cdot g} = 4{,}587mm$ ≈ 4,6mm $\quad \cos(\alpha) = \frac{\Delta l}{l}$ $\quad$ α=7,1°
   b) $D = \frac{m \cdot g}{l} = 0{,}1635N/m$ $\quad x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{D}} = 7{,}42cm$ $\quad$ <u>oder</u>: $\quad x_{max} = \sin(7{,}1°) \cdot 0{,}6m$=7,42cm
   c) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}6m}{\frac{9{,}81m}{s^2}}} = 1{,}554s$ $\quad$ Bewegungsgleichung: $\quad x(t) = 7{,}42cm \cdot \sin(3{,}1\pi \cdot t/s)$
   t = 1s $\quad$ x(t) = -2,29cm $\quad$ Elongationsenergie: $\quad E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1635\frac{N}{m} \cdot (-0{,}0229m)^2$
   $E_{pot} = 4{,}3 \cdot 10^{-5}J$
   $E_{kin} = E_{ges} - E_{pot} = 4{,}07 \cdot 10^{-4}J$ $\quad$ v=0,285m/s