**mathematische Herleitung der Schwingungsgleichung einer harmonischen Schwingung:**

(1) lineares Kraftgesetz: $F = -D \cdot x(t)$

(2) Newton'sches Grundgesetz: $F = m \cdot a(t) \quad = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit

Gleichsetzen: $-D \cdot x(t) = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Normalform: $0 = D \cdot x(t) + m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$$

$$x''(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$$

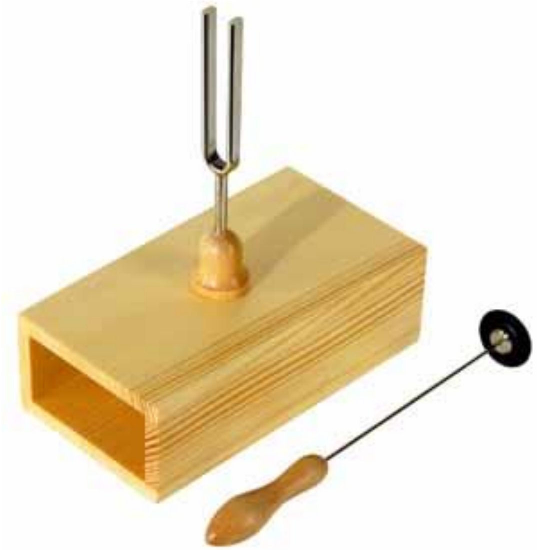
*Eine Funktion x(t) ist mit ihrer 2.Ableitung x"(t) über eine Konstante verknüpft.*

**Die Lösung der Differentialgleichung ergibt eine Sinusfunktion …**

► … eine harmonische Schwingung kann durch eine Sinusfunktion beschrieben werden …

# Periodendauer und Frequenz

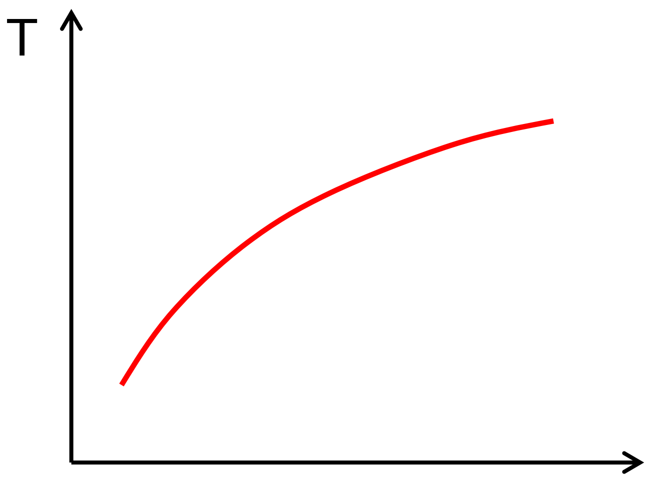
## harmonischer Schwinger



## Federschwinger:

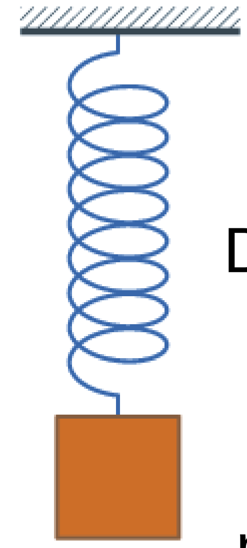
→ *experimentelle Untersuchung (SE)*

Je größer die Masse m des Schwingers, desto größer die Periodendauer T.




$$T \sim \sqrt{m}$$

weitere Abhängigkeiten ?




D … Federkonstante (Richtgröße)

m … Masse des Schwingers

**T = ?**

## mathematische Herleitung:

(1) lineares Kraftgesetz: (2) Newtonsches Grundgesetz:

$$F = -D \cdot x(t) \qquad\qquad F = m \cdot a(t)$$

$$-D \cdot (x)t \;= m \cdot a(t)$$
$$-D \cdot (x)t \;= m \cdot x''(t)$$

$$\left.\begin{aligned} v_{max} &= \omega \cdot x_{max} \\ a_{max} &= v_{max} \cdot \omega \end{aligned}\right\} a_{max} = x_{max} \cdot \omega^2$$

$$-D \cdot x_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) = m \cdot [-a_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)]$$

$$-D \cdot x_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) = m \cdot [-x_{max} \cdot \omega^2] \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$D = m \cdot \omega^2$$

$$D = m \cdot (\frac{2\pi}{T})^2 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}}$$

Die Periodendauer T eines schwingenden Systems wird durch dessen Masse **m** und die Richtgröße **D** bestimmt.

$$T \sim \sqrt{m}$$

$$T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$$

*Für einen vertikalen Federschwingen ergibt sich die Masse m aus der Masse $m_F$ der Feder und des schwingenden Körpers $m_K$.*

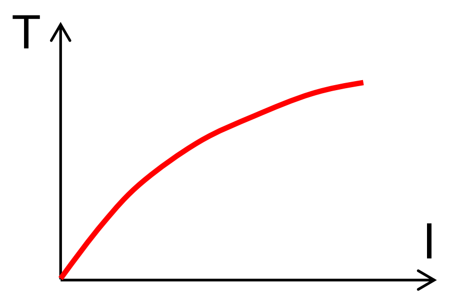
# Fadenpendel:

→ *experimentelle Untersuchung (Hausexperiment)*

(1) $T=f(m)$


Die Periodendauer T
ist von der Masse m
(Massenpunkt/reibungsfrei)
unabhängig.

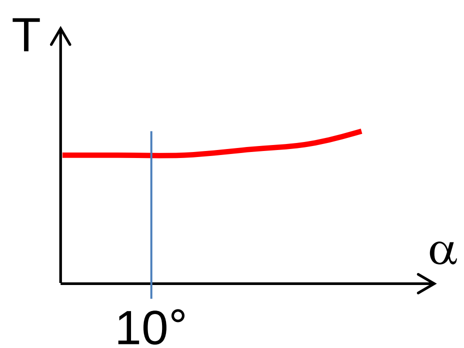
(2) $T=f(l)$




Die Periodendauer T
nimmt mit der Pendel-
länge l zu.

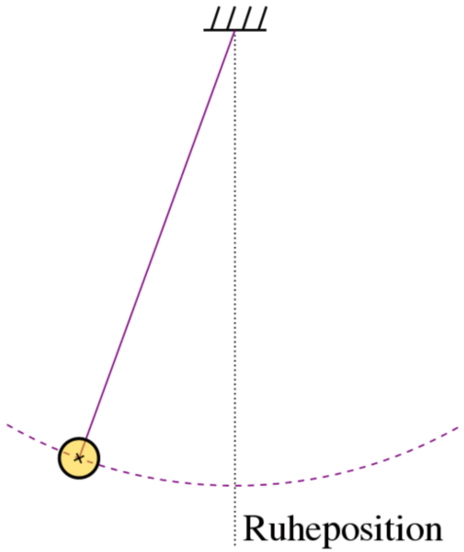
Mit zunehmender Pendel-
länge steigt die Perioden-
dauer weniger an.

(3) $T=f(\alpha)$




Die Periodendauer T ist
vom Auslenkwinkel $\alpha$ für
kleine Auslenkungen
(harmonische Schwingung)
unabhängig.

# Periodendauer am Fadenpendel:




► *Die Periodendauer ist von der Masse unabhängig …*

$$F_R = -m \cdot g \cdot sin(\frac{x}{l})$$

kleine Winkel (<10°): $\sin\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{x}{l}$

$$F_R = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l} \qquad \frac{m \cdot g}{l} = D$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

<u>Bedingungen:</u>

- kleine Auslenkwinkel
- punktförmiger Massekörper
- masseloser Faden

→ mathematisches Pendel

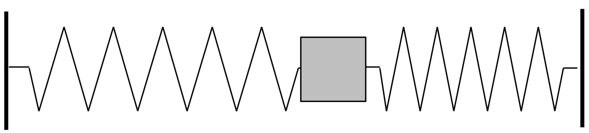
<u>Bedeutung:</u>

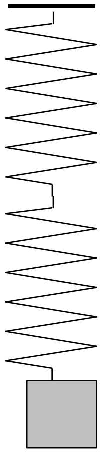
→ Bestimmung der Fallbeschleunigung g

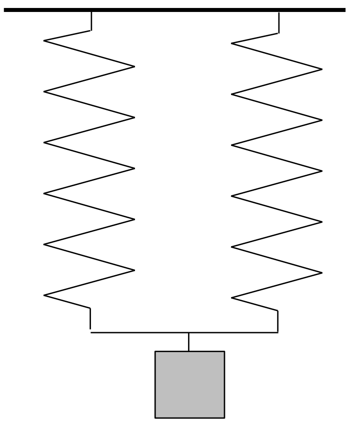
# Schwingende Federsysteme:

(Masse m, Federkonstante $D_F$)

vertikaler Federschwinger







$D_r = D_{F1} + D_{F2}$

Für $D_{F1} = D_{F2}$ ergibt sich:

$D_r = 2D_F$

„weichere“ Feder

$$\frac{1}{D_r} = \frac{1}{D_{F1}} + \frac{1}{D_{F2}}$$

$$\rightarrow D_r = \frac{D_F}{2}$$

*größere Periodendauer*

„härtere“ Feder

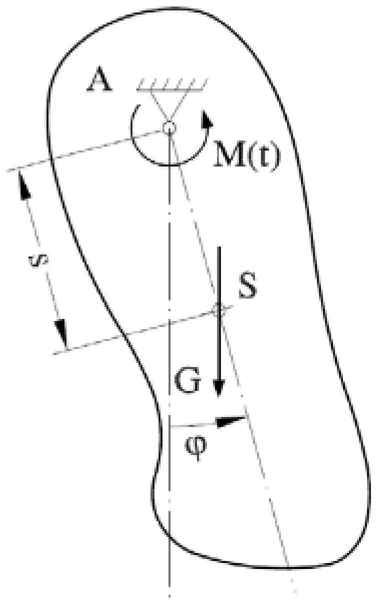
$D_r = D_{F1} + D_{F2}$

$D_r = 2D_F$

*kleinere Periodendauer*

*** physisches (physikalisches) Pendel:**

Die Schwingung eines **ausgedehnten Körpers** um einen festen Punkt entspricht einer realeren Bewegung und wird als **physisches Pendel** bezeichnet.




Die Periodendauer (Frequenz) wird durch die Form bzw. Massenverteilung des schwingenden Körpers bestimmt.

*Es kann nicht die Gleichung des mathematischen Pendels angewendet werden!*

Es gilt: $$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{mgs}} \qquad \frac{I}{m \cdot s} = l_R \qquad \boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_R}{g}}}$$

I … Trägheitsmoment

s … Abstand Drehpunkt - Schwerpunkt

$l_R$ … reduzierte Pendellänge