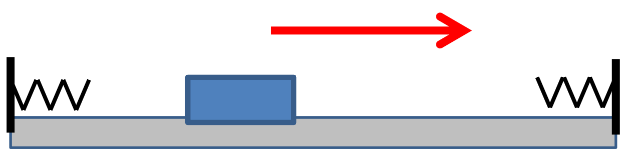
harmonisch oder nicht ?

periodische Bewegung
eines Wagens auf
einer Luftkissenbahn

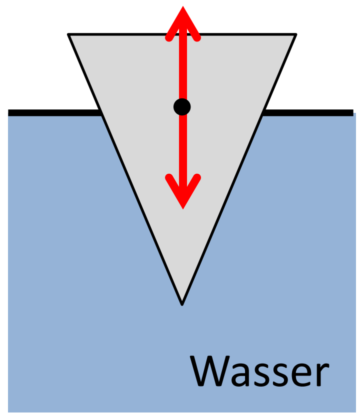


gleichförmige *Bewegung des Wagens zwischen den Federn*

F(x)=0

→ *nicht harmonisch*

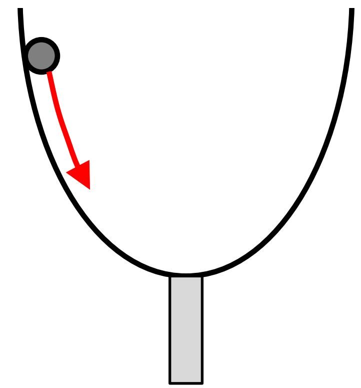
schwingende
kegelförmige Boje



$F_A \not\propto \Delta h$

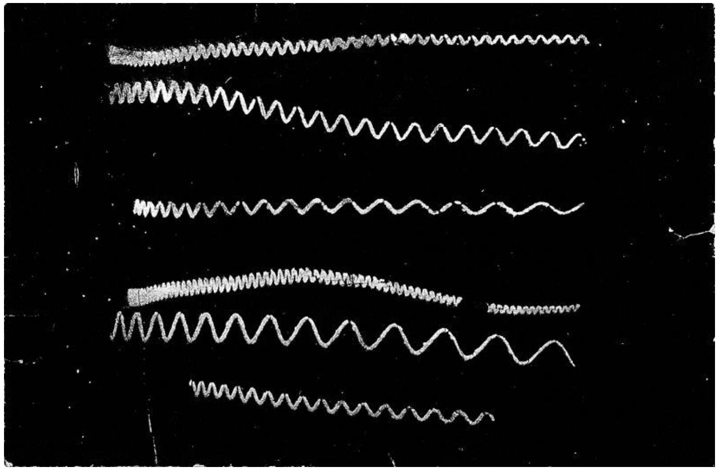
→ *nicht harmonisch*

rollende Kugel
im Glaskelch



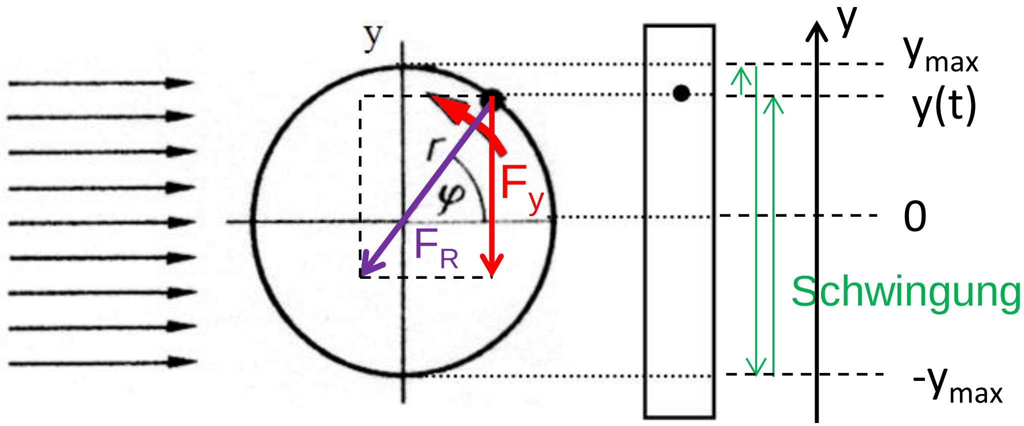
abhängig von der Form (Krümmung) des Kelches

Schwingungsgleichung der harmonischen Schwingung



Vorüberlegungen:

- *Schattenprojektion der gleichförmigen Kreisbewegung eines Punktes*



Die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung in eine Ebene liefert das Bild einer Schwingung.

Ist diese Schwingung harmonisch?

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung wirkt eine konstante Radialkraft F_R:

$$F_R = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Für die Kraftkomponente in Schwingungsrichtung ergibt sich F_y:

$$F_y = F_R \cdot \sin(\varphi)$$

Für φ, y und r gilt der Zusammenhang:

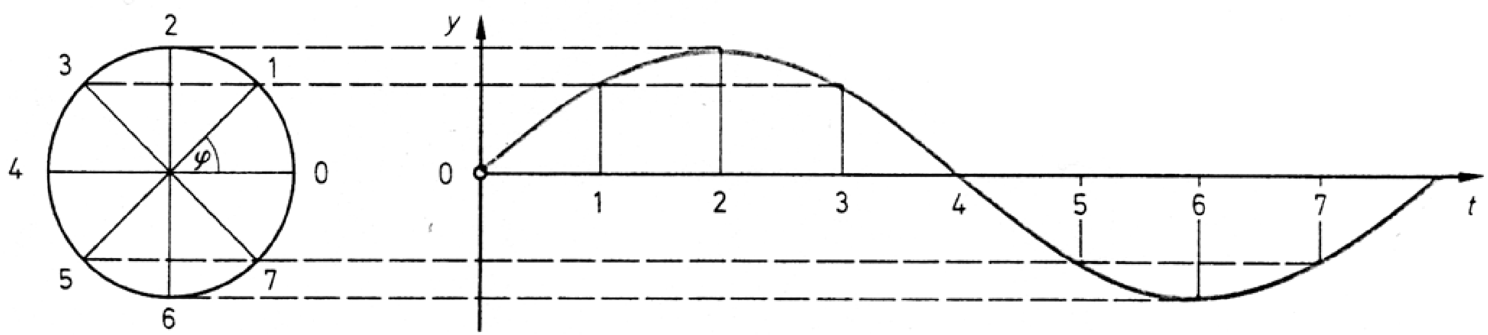
$$\sin(\varphi) = \frac{y(t)}{r}$$

Damit ergibt sich: $F_y = \frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \frac{y(t)}{r} = \frac{m \cdot v^2}{r^2} \cdot y(t)$ $mit\ \frac{m \cdot v^2}{r^2} = konstant$

► Die Kraftkomponente einer projizierten Kreisbewegung in Schwingungsrichtung erfüllt das lineare Kraftgesetz.

► Die projizierte Schwingung ist harmonisch.

Bewegungsgleichung:



$Für\ y = f(\varphi, r)\ gilt$: $y = r \cdot \sin(\varphi)$

(1) Einsetzen der Schwingungsgrößen: $y = y_{max} \cdot \sin(\varphi)$

(2) Zuordnung $\varphi \rightarrow$ t, T : $\frac{2\pi}{T} = \frac{\varphi}{t} \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t$

(3) Zusammenfassung (1) und (2): $y = y_{max} \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t)$

(4) Winkelgeschwindigkeit/Kreisfrequenz ω: $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega$

Schwingungsgleichung einer harmonischen Schwingung:

$$\boxed{y(t) = y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)} \quad mit\ \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Anfangsbedingung:

y(0)=0

Beginn in pos. Richtung

→ Elongations-Zeit-Gesetz

Die erste Ableitung des Elongations-Zeit-Gesetzes liefert das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} \qquad v(t) = \underline{y_{max} \cdot \omega} \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad y_{max} \cdot \omega = v_{max}$$

$$\boxed{v(t) = v_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)}$$

Die zweite Ableitung des Elongations-Zeit-Gesetzes liefert das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz:

$$a(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \qquad a(t) = \underline{-v_{max} \cdot \omega} \cdot sin(\omega \cdot t) \qquad v_{max} \cdot \omega = a_{max}$$

$$\boxed{a(t) = -a_{max} \cdot sin(\omega \cdot t)}$$

mathematische Herleitung der Schwingungsgleichung einer harmonischen Schwingung:

(1) lineares Kraftgesetz: $F = -D \cdot x(t)$

(2) Newtonsches Grundgesetz: $F = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit

Gleichsetzen: $-D \cdot x(t) = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Normalform: $0 = D \cdot x(t) + m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$$

$$x''(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$$

Eine Funktion x(t) ist gleich dem Produkt einer Konstanten und ihrer 2.Ableitung x“(t)

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt eine Sinusfunktion …

Jede harmonische Schwingung kann mit einer Sinusfunktion beschrieben werden.

!